Développement : Théorème de Weierstrass.

RM

2022-2023

Référence :

1. Oral à l'agrégation de mathématique

Énoncé :

Soit J un segment de $\mathbb{R}$ et $f : J \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue, alors il existe une suite de polynômes (P_n) telle que P_n converge uniformément vers f sur J.

On note $\mathcal{E}$ les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ à support compact.
On rappelle avant les théorèmes suivants :

Théorème 1 : Soient f une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ et g une fonction de $L^p(\mathbb{R})$, avec $1 \leq p < +\infty$. Alors pour presque tout x la fonction $y \mapsto f(y)g(x-y)$ est intégrable et la fonction $f \star g$, définie pour tout x par

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$$

appartient à $L^p(\mathbb{R})$ et $\|f \star g\|_p \leq \|f\|_1.\|g\|_p$.

Définition 2 : Une approximation de l'unité est une suite (f_n) de fonctions positives de $\mathcal{E}$ telles que $\|f_n\|_1 = 1$ et pour tout $M > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{|t|\geq M} f_n = 0.$$

Lemme 3 : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite de réels $a_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt$ et la suite de $\mathcal{E}$ suivante

$$\begin{array}{rccl} p_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \begin{cases} (1-t^2)^n/a_n & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Alors (p_n) est une approximation de l'unité.

Démonstration : Il est clair que $p_n \in \mathcal{E}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $\|p_n\|_1 = 1$ et que p_n est positif. Commençons par minorer a_n :

$$a_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt \geq \int_0^1 t(1-t^2)^n dt = \left[\frac{-(1-t^2)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Soit $M \in]0,1]$,

$$\int_{|t|\geq M} p_n(t)dt = \frac{2}{a_n}\int_M^1 (1-t^2)^n dt \leq 2(n+1)(1-M^2)^n.$$

Comme $(1-M^2) < 1$, on en déduit que $\int_{|t|\geq M} p_n(t)dt$ converge bien vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
□

Résolution :

Lemme 4 : Soit (f_n) une approximation de l'unité et $f \in \mathcal{E}$. Alors $f_n \star f$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Le but est de montrer que $\|f_n \star f - f\|_\infty$ tend vers 0. Pour cela on va étudier l'intégrale sur deux zones différentes de $\mathbb{R}$.
Comme f est nulle en dehors d'un compact, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $u > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$|y| < u \Rightarrow |f(x-y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme (f_n) est une approximation de l'unité, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\int_{|y|>u} f_n \leq \varepsilon$. Ainsi, comme $\|f_n\|_1 = 1$ pour tout n et que f_n est positive et appartient à $\mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} f_n \star f(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_n(y) f(x-y) dy - f(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_n(y)(f(x-y) - f(x)) dy \qquad \text{car } f(x) = 1.f(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(y) dy . f(x) \\ &= \int_{|y| \geq u} f_n(y)(f(x-y) - f(x)) dy \\ &+ \int_{|y| \leq u} f_n(y)(f(x-y) - f(x)) dy. \end{aligned}$$

On scinde maintenant l'intégrale en deux. Comme $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, il existe $M \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \left| \int_{|y| \geq u} f_n(y)(f(x-y) - f(x)) dy \right| &\leq \int_{|y| \geq u} f_n(y) |f(x-y) - f(x)| dy \\ &\leq 2M \int_{|y| \geq u} f_n \\ &\leq 2M\varepsilon \end{aligned}$$

Comme f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{|y| \leq u} f_n(y)(f(x-y) - f(x)) dy \right| &\leq \int_{|y| \leq u} f_n(y) |f(x-y) - f(x)| dy \\ &\leq \int_{|y| \leq u} f_n(y) \varepsilon dy \\ &\leq \varepsilon \|f_n\|_1 \leq \varepsilon \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n \star f(x) - f(x)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}} f_n(y)(f(x-y) - f(x)) dy \right| \leq 2M\varepsilon + \varepsilon.$$

Ainsi $\|f_n \star f - f\|_\infty$ converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$. □

Lemme 5 : Soit $f \in \mathcal{E}$ telle que f est nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$, alors pour tout entier n, $f \star p_n$ est une fonction polynomial sur $[-1/2, 1/2]$.

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1/2, 1/2]$. Alors

$$f \star p_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} p_n(x-t)f(t)dt.$$

Or $|x-t| \leq 1$ car $t \in [-1/2, 1/2]$ et $x \in [-1/2, 1/2]$. Ainsi

$$f \star p_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} (1-(x-t)^2)^n f(t)/a_n dt.$$

Or $(1-(X-t)^2)^n f(t)/a_n$ est un polynôme de la forme $\sum_{k=0}^{2n} q_k(t)X^k$ où les coefficients q_k sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Ainsi

$$\begin{aligned} f \star p_n(x) &= \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{k=0}^{2n} q_k(t)x^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{2n} x^k \left(\int_{-1/2}^{1/2} q_k(t)dt \right). \end{aligned}$$

est une fonction polynomial sur $[-1/2, 1/2]$. □

Démonstration (Weierstrass) : On note $J = [a, b]$. On prolonge f à $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = 0$ si $x < a-1$ et si $x > b+1$, f est une fonction affine sur $[a-1, a]$ valant 0 en $a-1$ et $f(a)$ en a et f est une fonction affine sur $[b, b+1]$ valant $f(b)$ en b et 0 en $b+1$. Ainsi f est maintenant une fonction de $\mathcal{E}$ nulle en dehors d'un segment $K = [a-1, b+1]$.
Il existe α et β tel que l'image par $h : x \mapsto \alpha x + \beta$ de $[-1/2, 1/2]$ donne K. Ainsi on définit l'application $g = f \circ h$ qui est aussi dans $\mathcal{E}$ et qui est nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$. D'après les 2 lemmes précédents, il existe P_n une suite de fonction polynomial sur $[-1/2, 1/2]$ telle que P_n converge uniformément vers g.
Ainsi si on note $Q_n(x) = P_n((x-\beta)/\alpha)$, Q_n est une fonction polynomial sur K qui converge uniformément vers f sur K. En particulier Q_n converge uniformément vers f sur J. □

> Brièvement, il existe une autre preuve qui passe par les polynômes de Bernstein qui ont une interprétation probabiliste, et l'idée est d'utiliser la loi faible des grands nombres.
> Il existe aussi une version trigonométrique avec le théorème de Féjer.
> Enfin, il existe une version généralisé avec le théorème de Stone-Weierstrass. (Voir livre pour toute les définitions)